



第 5 章 附加材料

— 介紹 —

我們的課程特意設置得簡潔明了，如果您希望有更多示例和討論來幫助您更好地理解課程內容，那麼您來對地方了！本文檔包含第5章課程中某些遊戲的補充材料。

我們給出了許多已解決難題的示例，以及有關如何設計有序的附加說明。早期家庭數學計劃基於這樣的理念，即早期數學是家庭應該一起做的事情，而讓孩子與您一起做謎題是該過程的重要組成部分。一旦掌握了每個遊戲，您應該會發現，即使不是全部，大多數遊戲也很容易設計。

其中的遊戲各具有不同的級別的難度。在接下來的內容中，有許多關於如何設計這些級別遊戲的建議和示例。始終從最簡單的遊戲開始。讓您的孩子通過簡單的遊戲來體驗成功和學習的樂趣，比從一開始就接觸過於困難的遊戲而導致沮喪要好得多。一旦您的孩子對數學建立了信心和產生了興趣，就可以慢慢增加難度了。值得一提的是，並非所有遊戲都符合每個人的興趣，因此不必要求孩子完成所有遊戲。

本章节包含以下內容：

- 第 5 章 — 因數大作戰
- 第 5 章 — 埃拉托色尼篩選法
- 第 5 章 — 槓桿與平衡吊飾
- 第 5 章 — 分割方塊區
- 第 5 章 — 字母替換謎題
- 第 5 章 — 圖形遊戲
- 第 5 章 — 乘積對決
- 第 5 章 — 受限計算器
- 第 5 章 — 加倍遊戲

— 合法的東西 —

每個家庭都應該有機會一起學習和享受數學。為此，Early Family Math 是一系列材料，家庭和教育工作者可以自由編輯、翻譯、複製和分發，無需徵得許可，僅供非商業用途。

第5章 — 因數大作戰

— 介紹 —

從任意數字開始(例如20)，讓孩子決定要先手還是後手。輪到玩家時，可從當前數字中減去其任一個因數(包括1和自身)。被迫使數字歸零的玩家輸掉遊戲。

— 分析 —

理解這個遊戲的經典策略，是從簡化版本開始分析——也就是從極小的起始數字著手。如果輪到你時面臨以下數字，結果會是：

- 1 → 必敗
- 2 → 必勝
- 3 → 必敗
- 4 → 必勝
- 5 → 必敗
- 6 → 必勝
- 7 → 必敗
- 8 → 必勝

至此規律已清晰可見：若輪到你時數字是奇數，則必敗；若是偶數，則必勝。

發現致勝策略是重要的一步，但我們可以更深入探討：為什麼會這樣？奇數與偶數的什麼特性導致了這種局面？把這個問題交給孩子，給予充足的時間思考和試驗——無須急於求解，這種反覆思索的過程極為珍貴，不應被草率跳過。

透過對小數字的實驗，很快就能揭示真相：

- 如果你面對奇數，其所有因數都是奇數，因此無論減去哪個因數，結果都會是偶數。這意味著本輪是奇數，下一輪必定變成偶數。
- 偶數的因數則同時包含奇數和偶數，情況不盡相同。但若你面對偶數，目標是讓對手拿到奇數，而達成這個目標非常簡單——直接選擇因數「1」減去即可！

3) 在這個質數篩選中，最後一個能篩出新數字的質數是哪一個？

在此篩選過程中，能篩出新數字的質數是 2、3 和 5。而 7 和 11 的倍數在之前都已經被標記過了。根據上一題的結論，只有當質數乘以大於或等於它本身的數字時，才可能產生新的標記。一旦我們遇到像 7 這樣的質數，且 $7 \times 7 = 49$ 已超過篩選範圍 (25) 時，就無需再檢查它。因此，我們只需要檢查那些平方小於或等於篩選範圍內最大數字的質數。

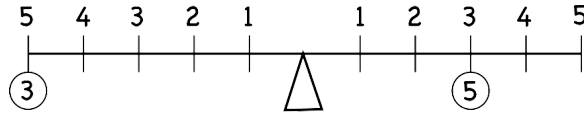
4) 如果給你一個數字，例如 53，需要檢查哪些質數才能確定它是質數？

根據上一題的結論，我們只需要檢查那些平方小於或等於 53 的質數。這些質數是 2、3、5 和 7——而它們都無法整除 53，因此 53 肯定是質數！

第5章—槓桿與平衡吊飾

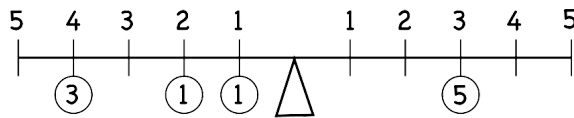
— 槓桿原理 —

槓桿原理指出：重物在槓桿一側所產生的力矩，等於其重量乘以與支點(懸掛點)的距離。



上圖中的槓桿，左側重量3與支點距離為5，產生的力矩為 $3 \times 5 = 15$ ；右側重量5與支點距離為3，力矩為 $5 \times 3 = 15$ 。兩側力矩相等，因此槓桿保持平衡。

若單側懸掛多個重物，其力矩需相加計算。



在此槓桿中，左側力矩為 $3 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 15$ ，右側為 $5 \times 3 = 15$ ，因此同樣處於平衡狀態。

本章問題皆以整數進行探討。您可以自行決定是否允許在同一懸掛點疊加多個重物——後續討論將預設允許此操作。

— 槓桿謎題 —

現有一個3單位與一個5單位的重物，需置於支點兩側以達成平衡。應如何放置？答案可以是距離5與3，也可以是10與6，甚至更大的倍數組合(如15與9)。請開放討論孩子提出的任何可能性。

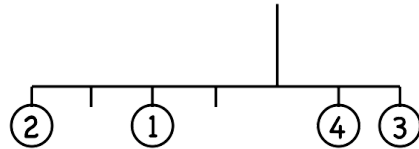
若將3單位與5單位重物置於槓桿同側，另一側應放置哪些重量與距離組合？此問題延續了第四章末「數字組合」頁面的探討。請嘗試不同重量組合(例如將3和5改為4和5、4和9或6和9)，觀察其規律。

若將3單位與5單位重物分置支點兩側，情況如何變化？此時可輕鬆稱量1單位重物：透過 $3 \times 2 = 5 \times 1 + 1 \times 1$ 達成平衡。還能用此方式稱量哪些其他重量？

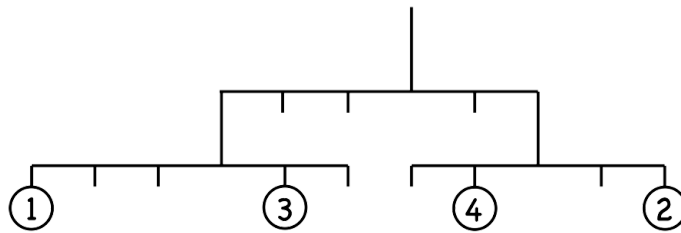
— 平衡吊飾 —

此類謎題會提供若干重物和一個帶有多個懸掛點的吊飾結構。挑戰在於每個懸掛點最多放置一個重物，使每一層吊臂都能保持平衡。為簡化問題，我們假設所有吊線皆無重量。吊飾中的每根吊臂都是需要平衡的槓桿，因此這類謎題是「槓桿平衡」的延伸——建議先熟練槓桿練習再嘗試此類題型。

從最簡單的單層吊飾開始，這實質上是懸空的槓桿。下圖展示如何將數字1至4的重物懸掛於此結構並達成平衡：根據槓桿原理，左側力矩為 $2 \times 4 + 1 \times 2 = 10$ ，右側為 $4 \times 1 + 3 \times 2 = 10$ ，兩側相等。

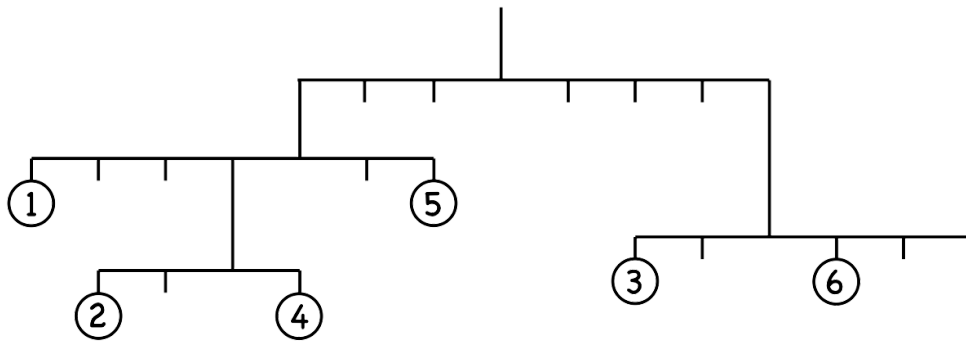


若吊飾包含多層結構，則每一層的每根吊臂都需獨立平衡。在下圖吊飾中，底層兩根吊臂分別滿足： $1 \times 3 = 3 \times 1$ 與 $4 \times 1 = 2 \times 2$ 。對於上一層而言，只需計算下層懸掛的總重量——例如左側總重為



$1+3=4$ 。此時上方吊臂的平衡條件為： $(1+3) \times 3 = (4+2) \times 2$ ，即 $12=12$ ，因此頂層也達成平衡。

歡迎互相設計吊飾謎題挑戰彼此！最後提供一道使用數字1至6的題型供您探索（無需強求數字不重複，任何成功平衡的組合都充滿樂趣）。驗證各層平衡：底層左支 $2 \times 2 = 4 \times 1$ ，右支 $1 \times 4 + (2+4) \times 1 = 5 \times 2$ ；中層 $3 \times 2 = 6 \times 1$ ；頂層 $(1+2+4+5) \times 3 = (3+6) \times 4$ 。



第 5 章 — 分割方塊區

— 介紹 —

將一個 4×4 或更大尺寸的矩形，劃分為數個較小的矩形。每個標示數字的格子必須獨立位於一個小矩形中，且該小矩形的面積必須等於格中的數字。

對成人而言，設計這類謎題相當簡單：先將矩形分割成數個小矩形，在各區域內標上面積數字，最後隱去分割線即可。唯一的技巧在於數字的擺放位置需讓謎題難易適中——若設計的題目過於困難，隨時可透過提示協助孩子解題。

— 解題策略 —

以下是一些能簡化解題過程的通用策略。請盡量引導孩子在遊戲中自行發現這些規則，並將他們總結出的技巧共同記錄下來。

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

1) 優先處理形狀選擇有限的數字

兩個數字「4」的區域選擇都非常有限：只能是 1×4 的長條或 2×2 的正方形。左上角的「4」受空間限制，無法形成 1×4 的長條，因此必定是一個佔據左上角的 2×2 正方形。這使得下方的「4」只能形成緊貼底邊的 1×4 長條。

2) 注意質數——它們必然存在於 $1 \times n$ 的長條中

上圖中的兩個「3」都必須包含在 1×3 的長條內。右上角的「3」只能形成頂邊或右側的 1×3 長條。由於左上角 2×2 區域已被數字「4」佔據，使其無法在頂邊形成長條。

同時，底部 1×4 長條的存在，迫使下方的「3」只能選擇靠上方的垂直長條位置。

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6	2	
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6	2	
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

3) 面積接近邊長的數字，通常選擇有限

觀察下圖中的數字6和5。最上方的6需要較大空間，唯一能容納它的方式是垂直向下延伸，佔滿整列。另一個6由於所在行已被第一個6的垂直區域截斷，無法形成1×6的橫向長條，因此必須是2×3的矩形(具體方位尚待確定)。

再舉一例：若題目出現數字8，由於1×8的長條無法放入網格，它必然屬於某個2×4的矩形區域。

4) 被圍堵的格子往往別無選擇

最上方的5被周圍區域限制，只能形成垂直的5格長條。另一個5本身是質數，本可橫向或縱向發展，但受左側6的垂直區域阻擋，無法橫向延伸，因此只能垂直向上發展，緊貼在數字3下方。

5) 角落位置通常具有決定性

右上角的數字2受空間限制，只能形成橫向的1×2長條，這個判斷能直接推導出相鄰區域的劃分。

第 5 章 一字母替換謎題

— 介紹 —

一旦您的孩子對本章前面幾頁中的缺失數字拼圖感到滿意，他們就可以開始玩這些謎題。在這些中，一位或多位數字被字母替換。字母的三個規則是：

- 給定的字母總是相同的數字 數字
- 的最左邊的數字永遠不會是 0
- 不同的字母必須是不同的數字數字來

通過解決加法或減法問題並替換一個或多個創建這些謎題。還可以創建拼圖來為您的孩子製作有趣的解決問題的挑戰。請注意，字母的值不會從拼圖轉移到拼圖。

— 示例 —

第一個示例說明瞭如何解決標準的加法或減法問題並從中製作字母替換難題。第一個版本用 A 替換了所有 6，第二個版本繼續用 B 替換了 2。

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \dashrightarrow \begin{array}{r} 23 \quad B3 \\ +4A \quad +4A \\ \hline A9 \quad A9 \end{array}$$

這些示例的其餘部分都經過精心構建，以允許使用特定情況的屬性進行求解。需要注意的一個特性是，當您將兩個數字相加時，下一列的進位始終為 0 或 1。因此，例如，在問題 $A + A = C4$ 中，C 必須為 1，因為不允許為 0。

$$\begin{array}{r} B \quad B \quad A \quad A \quad D \quad A \\ +8 \quad +B \quad +A \quad +2 \quad +2 \quad +B \\ \hline C \quad 8 \quad C4 \quad BC \quad EE \quad AC \end{array}$$

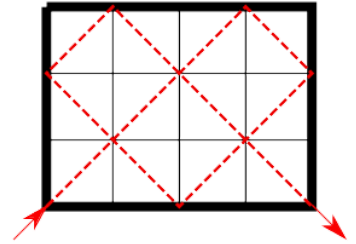
$$\begin{array}{r} A \quad C \quad A \quad A \\ A \quad C \quad A \quad A \quad A \quad B \\ +A \quad +C \quad +7 \quad +B \quad +BB \quad +AB \\ \hline B2 \quad D4 \quad B \quad B0 \quad A7 \quad BA \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BA \quad AD \quad AA \quad AA \quad AA \quad AA \\ +BB \quad +BD \quad +BA \quad +CB \quad +AB \quad +AA \\ \hline CAB \quad BCC \quad BBC \quad BBC \quad CAC \quad BBC \end{array}$$

第 5 章 — 圖形遊戲

— 台球路徑簡介 —

想像一張四個角落各有一個袋口的台球桌。當球從桌邊反彈時，會以與入射角度相同的角度彈出。如果從左下角以45度角擊球，球最終會落入哪個袋口？答案取決於球桌的尺寸。右圖展示的是在3x4方格球桌上的運動軌跡。



請給孩子一張球桌的方格圖，讓他們預測：球最先會進入哪個角落的袋口，以及需要經過多少次反彈才會進入該袋口。

— 台球路徑分析 —

開始時請讓孩子自由探索，不必急於尋求結論。您會發現這個問題對年幼者而言蘊含著相當複雜的概念。必要時可透過提問引導思考，例如：「何不先從最簡單的球桌尺寸開始尋找規律？」若孩子能養成這種思維習慣，將終身受益！

最基礎的是 $1 \times n$ 型長條球桌，這類情況很容易理解。嘗試幾個不同 n 值後，規律便會浮現。千萬別小看這樣簡單的結論——任何被徹底理解的發現都值得鼓勵，而且這將成為後續探索的基石。

結論：球總共會反彈 $n-1$ 次，若 n 為偶數則落入右下角，若 n 為奇數則落入右上角。

接著研究 $2 \times n$ 型球桌，其中的規律更為豐富。此時仔細記錄實驗結果格外重要。敏銳的觀察者會發現： 2×4 球桌的運動模式等同於 1×2 球桌， 2×6 則等同於 1×3 。由此歸納出關鍵結論。

結論： $2 \times (2n)$ 型球桌的運動軌跡與 $1 \times n$ 型本質相同。

為什麼會這樣？這正是培養數學思維的契機：發現規律 → 理解成因 → 拓展應用。其實當球桌長寬按相同比例放大時，反彈軌跡不會改變（幾何學中稱為「相似形」）。因此我們能得出更通用的結論。

結論：當球桌尺寸從 $m \times n$ 等比例放大為 $(k \cdot m) \times (k \cdot n)$ 時，運動模式保持不變。

我們透過逐步探索得出了這個重要的結論，而這確實是個重大的發現！這意味著我們在分析任何球桌時，都可以先消除長寬的公共因數。

回到剛才 $2 \times n$ 球桌的討論。我們已經理解了當 n 為偶數時的情況，那麼當 n 為奇數時會如何呢？讓我們觀察 $n=1,3,5,7\dots$ 的狀況，很快就能發現規律：

結論：當 n 為奇數時， $2 \times n$ 球桌總共會產生 n 次反彈，最終球會落入左上角。

隨著更多實驗的進行，我們發現了更多規律：

- 當 n 不是 3 的倍數時， $3 \times n$ 球桌會產生 $n+1$ 次反彈。若 n 除以 3 餘 1，球落入右上角；若餘 2，則落入右下角。
- 當 n 為奇數時， $4 \times n$ 球桌會產生 $n+2$ 次反彈，最終落入左上角。
- 當 n 不是 5 的倍數時， $5 \times n$ 球桌會產生 $n+3$ 次反彈。 n 為奇數時落入右上角， n 為偶數時落入右下角。

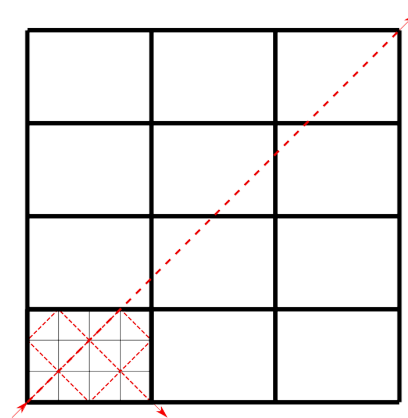
根據這些觀察，我們可以大膽提出一個猜想：

猜想：假設 k 和 n 互質（沒有公共因數），那麼 $k \times n$ 球桌將會產生 $k+n-2$ 次反彈。若 k 為偶數，落入左上角。若 k 為奇數且 n 為奇數，落入右上角。若 k 為奇數且 n 為偶數，落入右下角。

如果這個猜想成立，我們就完全解決了這個問題！接下來就是要驗證這個猜想的正確性（或者證實它是錯的）。

雖然有多種理解方式，但這個問題的關鍵在於一個絕妙的新思路——將球桌「展開」，讓球的軌跡變成直線！下圖展示了將原本的 3×4 球桌展開後，球的運動軌跡如何成為一條直線。

透過這個方法，我們就能輕鬆驗證猜想的正確性。每次反彈對應於穿越一條邊界線：垂直方向要穿越 $(k-1)$ 條線，水平方向要穿越 $(n-1)$ 條線，總共就是 $k+n-2$ 次穿越。至於最終落點，則可以透過追蹤展開過程來確定。至此，我們完成了一段精彩的探索之旅！



— 圖形鋪排 — 介紹 —

假設你有一個 8×8 的棋盤和一堆 1×2 的多米諾骨牌。用32張這樣的骨牌正好鋪滿整個棋盤並不難。

現在，我們試著從棋盤上拿走一些格子，看看會發生什麼。如果你拿走棋盤的一個角，立刻會發現無法再用骨牌鋪滿——因為每張骨牌總要蓋住兩個格子，而現在棋盤只剩下63個格子。那麼，如果拿走兩個角，讓剩下的格子變成偶數，現在能鋪滿嗎？答案要看你拿走的是哪兩個角。為什麼會這樣？如果不限於拿走角落的格子，結果又會如何？

— 圖形鋪排 — 分析 —

在向孩子透露「塗色觀察法」之前，先讓他們自己動手嘗試。如果他們用小型棋盤反覆試驗，或許能自己總結出規律——這樣獲得的理解總是更加深刻。

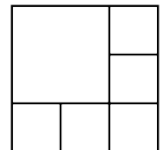
有個重要技巧能幫我們看清這個問題：利用棋盤黑白相間的塗色特性。當你把 1×2 的骨牌放在棋盤上時，會發現它總是同時蓋住一個白格和一個黑格。也就是說， k 張骨牌不僅會覆蓋 $2k$ 個格子，還會正好蓋住 k 個白格和 k 個黑格——兩種顏色的格子數量必須相等。明白了這一點，就能立即看出：如果被拿走的格子中某種顏色過多，這個棋盤就注定無法鋪滿。

若孩子對此興致盎然，不妨嘗試用其他形狀來鋪排。比如試試用 1×3 的長條，或是L型的三格拼板。使用這些形狀時會發現什麼新規律？還有哪些有趣的形狀值得探索呢？

— 小方形填大方格 — 介紹 —

如何用大小不同的正方形填滿一個大正方形？這些正方形的邊長不能是任意數字，必須是某個基本長度的整數倍。我們要探討的是：究竟能用多少個正方形來完成這種填充？如果某個數字是可行的，是否有簡單的方法來說明如何實現？

請讓孩子花數日時間自由探索，不必急於尋找答案。這個問題有許多不同的思考路徑，請讓思維保持開放，順應孩子的思路發展。下圖展示了用6個正方形實現的範例。



從簡單範例著手總是好方法。先將大正方形分割成相同大小的小正方形是個容易的開始，由此可知平方數(1, 4, 9, 16, 25...)都是可行的。

6方格的範例出發，我們可以運用一個任意尺寸的大正方形，並在相鄰兩邊鋪滿 1×1 的小正方形。隨著大正方形尺寸遞增(1×1 , 2×2 , 3×3 ...)，我們可得到 $1+3=4$, $1+5=6$ (如圖示), $1+7=8$, $1+9=10$ 等組合。由此可知，所有從4開始的偶數都能通過此方法實現。

有個極具威力的核心概念：我們可以取一個可行的配置，將其中的某個正方形替換成另一個可行配置。例如，將一個由4個 1×1 方格組成的 2×2 正方形，把其中一個 1×1 方格替換成6方格的配置，就能得到右圖所示的9方格組合。

當一個正方形被 n 方格的配置取代時，總方格數的淨變化是增加 $(n-1)$ 個。這意味著我們可以將某個可行數字減去1後的倍數，疊加到其他可行數字上。特別值得注意的是，我們可以將 $4-1=3$ 的倍數疊加到任何可行數字上——最簡單的基礎就是從4開始的所有偶數。

綜合以上分析，可知數字1, 4, 6, 7, 8, 9...都是可行的，而且很容易找到具體的實現方法。同時也能明顯看出2, 3, 5是無法實現的。

若孩子對此興致濃厚，可嘗試各種變化題型：例如僅允許使用特定尺寸的正方形（如 1×1 , 2×2 , 3×3 ），或只允許使用 2×2 和 3×3 的組合。探索哪些限制條件會產生有趣的結果，哪些又會顯得平淡。

另一個探索方向是改用相同形狀的圖形來填充主圖形。例如對正三角形提出相同的問題（使用小正三角形填充大正三角形）。有些圖形會帶來有趣的發現，有些則不然——究竟哪些圖形值得探究呢？

第 5 章 — 乘積對決

— 遊戲介紹 —

準備一張如下所示的遊戲紙：

- 首輪：第一位玩家將一枚棋子放在底部數字列(1-9)中的任意數字上。
- 次輪：第二位玩家將另一枚棋子放在底部數字列的另一個數字上，並在6x6的乘積網格中標記這兩個數字的乘積。
- 後續回合：每位玩家輪流移動兩枚棋子中的任意一枚，並標記移動後兩個數字的新乘積(如果該乘積格未被佔領)。
- 勝利條件：最先成功佔領連續3個乘積格(橫、豎或斜)的玩家獲勝。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

為了加強孩子對乘法運算的熟練度，可以打亂6x6網格中乘積的排列順序。

遊戲板可以根據需要擴展，雖然尺寸會迅速增大。下方是幾個更大尺寸的遊戲板範例，並附有對應的更大數字範圍。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	60	63	64	
70	72	80	81	90	100

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

註：帶有紅色星號的方格為「自由格」，雙方玩家在需要時均可使用。

第 5 章 — 受限計算器

— 介紹 —

假設你有一個嚴重損壞的計算器，挑戰目標是透過它設法顯示出特定結果。你可以設計各種情境，用簡短的謎題描述創造有趣的挑戰。這項活動非常適合在零碎時間口頭進行。以下提供幾個範例幫助你開始：

雖然這些問題偶爾會涉及較深的數學概念，但主要目的在於享受探索過程的樂趣。

1a) 若計算器僅有加、減、乘、除功能鍵可用，且數字鍵只有「4」能正常使用。能否讓計算器顯示出「21」？若能達成，最少需要多少運算步驟？

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21$ 是一種方法，但存在許多其他組合。另一種可能是： $4 \times (4 + 4/4) + 4/4$ 。重點在於享受嘗試與探索的過程。

1b) 若最多只能使用四次「4」，可以產生哪些數字？如果必須剛好使用四次呢？

隨著孩子數學能力的提升，「四個4的運算」會是極富趣味的挑戰。現階段孩子的運算工具雖有限，但仍能從中獲得許多樂趣。若未使用除法或小數，許多數字將難以實現。不必強求按順序找出所有數字，盡可能探索越多不同的數字越好。

以下提供幾個例子：

$$1 = (4/4) \times (4/4) = 44 / 44$$

$$2 = 4 / ((4 + 4) / 4)$$

$$3 = (4 + 4 + 4) / 4$$

$$4 = (4 - 4) \times 4 + 4$$

$$6 = 4 + (4 + 4) / 4$$

$$7 = 44 / 4 - 4$$

$$8 = (4 + 4) \times (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$$

1c) 嘗試使用其他單一數字組合來創造不同結果。

2a) 若計算器只能進行「+4」或「+7」的運算，能產生哪些數字？

這是我們已多次觀察到的規律：從 $(4-1) \times (7-1) = 18$ 開始，透過組合 4 和 7 的倍數，可以生成所有大於等於 18 的整數。例如：

$$18 = 2 \times 7 + 4$$

$$19 = 3 \times 4 + 7$$

$$20 = 5 \times 4$$

$$21 = 3 \times 7$$

依此類推。

2b) 若計算器能使用「+4」、「+7」、「-4」、「-7」的運算，能產生哪些數字？

透過結合加法與減法，所有整數都能被生成。

2c) 將數字 4 和 7 替換為其他數字組合，會發生什麼變化？

這背後是數論中的貝祖定理：透過組合兩個數的倍數（使用加減法），可以生成它們最大公因數的所有倍數。例如，若兩數互質（最大公因數為 1），則可以生成所有整數。

3) 若計算器只有「1」鍵，且只能進行「加 1」或「乘以 2」的運算，能創造哪些數字？

$$\text{例如：} 2 \times (2 \times 1) + 1 = 5$$

這實際上是二進位計數法的巧妙應用。孩子無需理解背後的原理，僅需享受探索過程。由於所有數字都能用二進位表示（即由 0 和 1 組成），因此僅透過「乘以 2」和「加 1」的組合，即可生成任意正整數。

以 21 為例（二進位：10101，即 $16 + 4 + 1$ ）：

$$21 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 1 + 0) + 1) + 0) + 1$$

第 5 章 — 加倍遊戲

— 介紹 —

玩家各自秘密選定5個介於20至120之間的不同數字。選定後公開這些數字。接著使用數字卡或其他方式，隨機選出一個1到20之間的數字。然後不斷將這個數字乘以2，直到出現以下兩種情況之一為止：

1. 翻倍後的數字第一次出現在某位玩家的秘密數字中
2. 數字翻倍後超過120

最先集齊所選5個數字的玩家獲勝。

— 分析 —

遊戲的關鍵在於：該選哪五個數字，勝算才最高？讓我們來分析幾個重要技巧：

技巧：你選的數字必須是「1-20中某個數字的翻倍結果」。

舉例來說，23、46這類數字絕對不要選，因為從1-20的任何數字開始翻倍，都永遠不會出現23。

技巧：不要選那些「半數更早出現」的數字。

比如你選44，為什麼不改成選22呢？因為如果對手選了22，當起始數字是11時（11→22→44...），對手會比你早一輪先得分！

如果你選擇 44，為什麼不選擇 22 呢？如果對方選擇 22，您將錯過一輪。

進階分析：

1到20的起始數字雖機率均等，但經過不同路徑會影響最終命中機率。例如：數字9會產生18（9→18→36...），因此18作為命中點的機率是11的兩倍。綜合計算各起始數字的路徑，得到以下命中機率分佈：

11 - 1/20(來自 11)

12 - 3/20(來自 3、6 和 12)

13 - 1/20(來自 13)

14 - 2/20(來自 7 和 14)

15 - 1/20(來自 15)

16 - 5/20(來自 1、2、4、8 和 16)

17 - 1/20(來自 17)

18 - 2 /20(來自 9 和 18)

19 - 1/20(來自 19)

20 - 3/20(來自 5、10 和 20)

顯然最理想的選擇應聚焦於16、12、20的倍數。一個簡單有效的策略是選取這五個數字：32、64、24、48、40。雖然無法保證每局必勝，但長期而言將為你帶來顯著優勢。64、24、48 和 40。這些數字不會總是贏，但隨著時間的推移，它們應該對你很好。